

О СВОЙСТВАХ ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССОВ В P_3 ¹

Аннотация. Доказываются 27 свойств, связывающих предполные классы трехзначной логики.

Ключевые слова: трехзначная логика, предполный класс.

Abstract. The article proves 27 qualities binding precomplete classes of ternary logic.

Key words: three-valued logic, precomplete class.

Введение

Пусть k – натуральное число, $k \geq 2$; $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, P_k – множество всех конечноместных функций на E_k . Элементы множества P_k будем называть функциями k -значной логики, или k -значными функциями. Определения используемых ниже операции суперпозиции, замыкания и замкнутого класса можно найти в [1].

Замкнутый (относительно суперпозиции) класс H функций k -значной логики назовем *предполным в P_k* , если $H \neq P_k$, но для любой функции $f \in P_k \setminus H$ замыкание множества $H \cup \{f\}$ совпадает с P_k .

Все предполные классы в P_2 были найдены Э. Постом в [2, 3], все предполные классы в P_3 были описаны С. В. Яблонским в [4]. Затем для любого $k \geq 3$ С. В. Яблонским и А. В. Кузнецовым было установлено, что число предполных в P_k классов конечно [5], а И. Розенберг описал предикаты, определяющие все предполные в P_k классы [6, 7].

1. Некоторые свойства пересечений предполных классов в P_3

Как известно [4], в трехзначной логике имеется ровно 18 предполных классов:

M_0, M_1, M_2 – классы функций, монотонных относительно порядка $2 < 0 < 1$, $0 < 1 < 2$ и $1 < 2 < 0$ соответственно;

U_0, U_1, U_2 – классы функций, сохраняющих разбиение $\{\{0\}, \{1, 2\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 0\}\}$ и $\{\{2\}, \{0, 1\}\}$ соответственно;

C_0, C_1, C_2 – классы функций, сохраняющих 2-местный предикат $((x = y) \vee \sigma \in \{x, y\})$ для любого $\sigma \in E_3$;

T_0, T_1, T_2 – классы функций, сохраняющих константу 0, 1 и 2 соответственно;

T_{12}, T_{02}, T_{01} – классы функций, сохраняющих множество $\{1, 2\}$, $\{0, 2\}$ и $\{0, 1\}$ соответственно;

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00701).

B – класс Слупецкого (все трехзначные функции, имеющие либо не более одной существенной переменной, либо принимающие не более двух значений);

S – класс функций, самодвойственных относительно перестановки (120);

L – класс линейных функций (над полем Галуа $GF(3)$).

Отметим, что в P_3 имеются тройки попарно двойственных классов (это классы M_i , U_i , C_i , T_i и T_{ij}).

Нам будет удобно обозначать через $\overline{K}$ дополнение множества функций K трехзначной логики до всего P_3 , т.е. $\overline{K} = P_3 \setminus K$. Обозначим через $E(f)$ множество значений функции f . Всюду в этой статье сложение и умножение будем вычислять по модулю 3.

Пусть $f, g \in P_3$. Будем говорить, что функция g является *подфункцией* функции f , если g можно получить подстановкой в функцию f вместо некоторых ее переменных констант из E_3 .

Сформулируем сначала два простых факта, которыми мы будем часто пользоваться далее.

Факт 1. Пусть $K \in \{M_0, M_1, M_2, U_0, U_1, U_2, C_0, C_1, C_2, B, L\}$. И пусть f – произвольная функция из K . Тогда любая подфункция функции f также принадлежит классу K .

Это следует из того, что указанные классы содержат все константы и являются замкнутыми.

Факт 2 (см. [5]). Пусть $K \in \{M_0, M_1, M_2, U_0, U_1, U_2\}$, f – произвольная функция из P_3 . Тогда из принадлежности к классу K всех одноместных подфункций функции f следует принадлежность к классу K и самой функции f .

Занумеруем предполные классы в P_3 числами от 1 до 18 в том порядке, в котором они перечислены выше. Каждой функции $f(\tilde{x}^n) \in P_3$ поставим в соответствие так называемую строку принадлежности $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{18})$, $\sigma_i \in \{+, -\}$, в которой $\sigma_i = «+»$ тогда и только тогда, когда f принадлежит i -му предполному классу.

В табл. 1 указаны строки принадлежности всех трехзначных функций, имеющих не более одной существенной переменной. Функцию из P_3 мы здесь и далее будем задавать строкой ее значений (предполагая, что наборы значений переменных перечислены в стандартном порядке).

Таблица 1

Таблица принадлежности одноместных функций трехзначной логики предполным классам (см. также [5])

	M_0	M_1	M_2	U_0	U_1	U_2	C_0	C_1	C_2	T_0	T_1	T_2	T_{12}	T_{02}	T_{01}	B	S	L
1	2			3			4			5			6			7	8	9
(000)	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	–	–	–	+	+	+	–	+
(001)	–	+	–	–	–	+	+	+	–	+	–	–	–	–	+	+	–	–
(002)	+	+	–	–	+	+	+	–	+	+	–	+	–	+	+	+	–	–

Окончание табл. 1

1	2			3			4			5			6			7	8	9
(010)	+	-	+	-	+	+	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	-	-
(011)	-	+	+	+	-	+	+	+	-	+	+	-	+	-	+	+	-	-
(012)	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
(020)	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	-	-	+	-	+	-	-
(021)	-	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	+
(022)	-	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	+	+	+	-	+	-	-
(100)	-	-	-	+	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-
(101)	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-
(102)	-	-	-	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	+	-	+
(110)	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	-	-	-	+	+	-	-
(111)	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+
(112)	+	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	+	+	-	+	+	-	-
(120)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+
(121)	-	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	-	+	-	-	+	-	-
(122)	-	+	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-
(200)	-	-	-	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-	+	-	+	-	-
(201)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+
(202)	+	-	-	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	-
(210)	-	-	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	+	-	+
(211)	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	-	-
(212)	+	-	+	+	+	-	-	+	+	-	+	+	+	+	-	+	-	-
(220)	-	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-	-	+	-	+	-	-
(221)	-	-	-	+	-	+	-	+	+	-	-	-	+	-	-	+	-	-
(222)	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-	+

Для решения задачи поиска всех попарно различных пересечений предполных классов функций трехзначной логики ключевым является следующий результат.

Теорема. В P_3 справедливы следующие включения:

$$M_1 \cap L \subseteq M_0 \cap M_2, \quad (1)$$

$$M_2 \cap U_1 \cap C_1 \subseteq M_0, \quad (2)$$

$$M_1 \cap M_2 \subseteq U_0, \quad (3)$$

$$C_1 \cap C_2 \subseteq U_0, \quad (4)$$

$$U_0 \cap U_1 \cap U_2 \subseteq M_0 \cap M_1 \cap M_2 \cap L, \quad (5)$$

$$U_1 \cap U_2 \subseteq C_0, \quad (6)$$

$$M_1 \cap M_2 \subseteq C_0, \quad (7)$$

$$M_1 \cap U_1 \subseteq C_0 \cap C_2, \quad (8)$$

$$U_1 \cap T_{01} \cap B \subseteq C_0, \quad (9)$$

$$T_0 \cap B \subseteq C_0, \quad (10)$$

$$T_{12} \cap L \subseteq U_0, \quad (11)$$

$$U_0 \cap L \subseteq C_0 \cap B, \quad (12)$$

$$C_0 \cap L \subseteq U_0, \quad (13)$$

$$T_0 \cap T_1 \cap L \subseteq S, \quad (14)$$

$$M_0 \cap S \subseteq M_1 \cap M_2, \quad (15)$$

$$U_0 \cap S \subseteq U_1 \cap U_2 \cap T_{12}, \quad (16)$$

$$C_0 \cap S \subseteq C_1 \cap C_2, \quad (17)$$

$$T_0 \cap S \subseteq T_1 \cap T_2, \quad (18)$$

$$T_{12} \cap S \subseteq T_{02} \cap T_{01}, \quad (19)$$

$$B \cap S \subseteq L, \quad (20)$$

$$T_{02} \cap T_{01} \subseteq T_0, \quad (21)$$

$$C_1 \cap T_0 \subseteq T_{01}, \quad (22)$$

$$M_1 \cap T_1 \subseteq T_{12} \cap T_{01}, \quad (23)$$

$$M_1 \cap C_1 \cap T_{02} \subseteq U_0 \cap U_2, \quad (24)$$

$$U_0 \cap T_1 \subseteq T_{12}, \quad (25)$$

$$U_0 \cap U_2 \cap T_{02} \subseteq M_1, \quad (26)$$

$$M_1 \cap T_{02} \cap B \subseteq C_0 \cap C_2. \quad (27)$$

Доказательство.

Докажем (1). Рассмотрим произвольную функцию $f(\tilde{x}^n) \in M_1 \cap L$. Из Факта 1 следует, что у функции $f(\tilde{x}^n)$ все одноместные подфункции $\psi(x)$ тоже принадлежат классу $M_1 \cap L$. Из табл. 1 имеем $\psi(x) \in \{(000), (012), (111), (222)\} \subseteq M_0 \cap M_2$. Тогда в соответствии с фактом 2 получим $f(\tilde{x}^n) \in M_0 \cap M_2$.

Докажем (2). Пусть $f(\tilde{x}^n) \in M_2 \cap U_1 \cap C_1$. Согласно факту 1 для любой одноместной подфункции $\psi(x)$ функции $f(\tilde{x}^n)$ справедливо $\psi(x) \in M_2 \cap U_1 \cap C_1$. Из табл. 1 видно, что $\psi(x) \in \{(000), (010), (012), (111), (212), (222)\} \subseteq M_0$. Тогда, используя факт 2, получим $f(\tilde{x}^n) \in M_0$.

Справедливость вложений (3) и (4) устанавливается аналогично (используются одноместные подфункции).

Для обоснования пункта (5) докажем более сильное утверждение:

$$U_0 \cap U_1 \cap U_2 = \{0, 1, 2, x\}$$

(с точностью до несущественных переменных).

Очевидно вложение правой части в левую. Фиксируем произвольную функцию $f(\tilde{x}^n) \in U_0 \cap U_1 \cap U_2$. Согласно факту 1 любая одноместная под-

функция ψ функции f также лежит в $U_0 \cap U_1 \cap U_2$. Значит, $\psi \in \{(000), (012), (111), (222)\}$. Пусть $f \neq \text{const}$. Тогда у f найдется хотя бы одна существенная переменная. Будем считать, что это x_n . Легко видеть, что существует набор $\tilde{\alpha}^{n-1} \in E_3^{n-1}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}^{n-1}, x) = x$.

Рассмотрим любой набор $\tilde{\beta}^{n-1}$, соседний с набором $\tilde{\alpha}^{n-1}$. Пусть эти наборы различаются в позиции i , $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, т.е. $\alpha_i \neq \beta_i$.

Докажем, что $f(\tilde{\beta}^{n-1}, x) = x$. Предположим, что это не так. Тогда существует такое число $\sigma \in E_3$, что $f(\tilde{\beta}^{n-1}, x) = \sigma$ при всех $x \in E_3$. Обозначим через τ тот единственный элемент, который содержится в множестве $E_3 \setminus \{\alpha_i, \beta_i\}$. Воспользуемся тем, что $f(\tilde{x}^n) \in U_\tau$. Так как $f(\tilde{\alpha}^{n-1}, \tau) = \tau$ и $f(\tilde{\beta}^{n-1}, \tau) = \sigma$, то $\sigma = \tau$.

С другой стороны, $f(\tilde{\alpha}^{n-1}, \tau+1) = \tau+1$ и $f(\tilde{\beta}^{n-1}, \tau+1) = \sigma$. Поэтому $\sigma \neq \tau$. Это противоречие.

Поскольку в кубе E_3^{n-1} для любых двух различных наборов существует цепь, их соединяющая, то мы получили, что $f(\tilde{\beta}^{n-1}, x) = x$ при всех $x \in E_3$ и при всех $\tilde{\beta}^{n-1} \in E_3^{n-1}$. Другими словами, $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \equiv x_n$.

Таким образом, вложение (5) установлено.

Докажем теперь (6)–(9). Фиксируем произвольную трехзначную функцию $f(\tilde{x}^n)$ из любого замкнутого класса $K \in \{U_1 \cap U_2, M_1 \cap M_2, M_1 \cap U_1, U_1 \cap T_{01} \cap B\}$. Предположим, что $f(\tilde{x}^n) \notin C_0$. Это означает, что найдутся наборы $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ из E_3^n такие, что $f(\tilde{\alpha}^n) = 1$ и $f(\tilde{\beta}^n) = 2$, причем для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется хотя бы одно из трех условий: $\alpha_i = \beta_i$, или $\alpha_i = 0$, или $\beta_i = 0$.

Рассмотрим произвольное $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, для которого $\alpha_i \neq \beta_i$. Значит, $(\alpha_i, \beta_i) \in \{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0)\}$.

1) Пусть $K = U_1 \cap U_2$. Если $(\alpha_i, \beta_i) \in \{(0, 2), (2, 0)\}$, заменим α_i на β_i . Так как $f(\tilde{x}^n) \in U_1$, значение функции f на новом наборе $\tilde{\alpha}^n$ не изменится. Если же $(\alpha_i, \beta_i) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$, наоборот, заменим β_i на α_i . Так как $f(\tilde{x}^n) \in U_2$, значение функции f на новом наборе $\tilde{\beta}^n$ также не изменится.

2) Пусть $K = M_1 \cap M_2$. Если $(\alpha_i, \beta_i) \in \{(0, 1), (0, 2)\}$, заменим $\alpha_i = 0$ на β_i . Так как $f(\tilde{x}^n) \in M_2$ и значение 0 является максимальным, а значение 1 – минимальным для порядка $1 < 2 < 0$, то значение функции f на новом наборе $\tilde{\alpha}^n$ останется равным 1. Если $(\alpha_i, \beta_i) \in \{(1, 0), (2, 0)\}$, наоборот, заменим $\beta_i = 0$ на α_i . Так как $f(\tilde{x}^n) \in M_1$, то значение функции f на новом наборе $\tilde{\beta}^n$ останется равным 2 по аналогичным причинам.

3) Пусть $K = M_1 \cap U_1$. Если $(\alpha_i, \beta_i) \in \{(0,1), (0,2)\}$ заменим $\alpha_i = 0$ на 2. Так как $f(\tilde{x}^n) \in U_1$, значение функции f на новом наборе $\tilde{\alpha}^n$ не изменится. В случае $(\alpha_i, \beta_i) = (1,0)$ заменим $\beta_i = 0$ на 1. Так как $f(\tilde{x}^n) \in M_1$, значение функции f на новом наборе $\tilde{\beta}^n$ останется равным 2. Наконец, в случае $(\alpha_i, \beta_i) = (2,0)$ заменим $\alpha_i = 2$ на 0. Так как $f(\tilde{x}^n) \in U_1$, значение функции f на новом наборе $\tilde{\alpha}^n$ также не изменится.

4) Пусть $K = U_1 \cap T_{01} \cap B$. Если $\beta_i = 2$, заменим его на 0, а α_i оставим без изменений. Из табл. 1 видно, что в классе $U_1 \cap T_{01} \cap B \cap \overline{C_0}$ нет функций одной переменной. Значит, каждая функция из этого класса принимает только значения 1 и 2. Поскольку $f(\tilde{x}^n) \in U_1$, значение функции f на новом наборе $\tilde{\beta}^n$ останется равным 2.

Проделав эту операцию для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ таких, что $\alpha_i \neq \beta_i$, получим в итоге два новых набора $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$.

Легко видеть, что в случаях 1 и 2 мы получим $\tilde{\alpha}' = \tilde{\beta}'$, но $f(\tilde{\alpha}') = 1 \neq 2 = f(\tilde{\beta}')$. Это противоречие. В случае 3 будет выполняться (относительно обычного порядка $0 < 1 < 2$) следующее: $\tilde{\alpha}' > \tilde{\beta}'$, но $f(\tilde{\alpha}') = 1 < 2 = f(\tilde{\beta}')$. Последнее противоречит тому, что $f(\tilde{x}^n) \in M_1$. Значит, $M_1 \cap U_1 \subseteq C_0$. В силу двойственности классов имеем также $M_1 \cap U_1 \subseteq C_0 \cap C_2$. В случае 4 набор $\tilde{\beta}'$, очевидно, состоит только из 0 и 1, в то время как $f(\tilde{\beta}') = 2$, что противоречит тому, что $f(\tilde{x}^n) \in T_{01}$.

Докажем (10) от противного. Пусть найдется функция $f \in \overline{C_0} \cap T_0 \cap B$. Очевидно, f принимает значения 1 и 2 (так как $f \in \overline{C_0}$) и значение 0 (на наборе $\tilde{0}^n$). Из условия $f \in B$ заключаем, что f имеет не более одной существенной переменной. Но в P_3^1 таких функций нет (см. табл. 1). Это противоречие.

Пусть $f \in T_{12} \cap L$. Предположим, что f имеет две (или больше) существенные переменные. Не умаляя общности, можно считать, что это x_1 и x_2 . Тогда, подставив в функцию f вместо остальных переменных значения 1 и 2, мы получим некую функцию $g(x_1, x_2) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \in T_{12}$, причем $c_1, c_2 \neq 0$. Теперь нетрудно убедиться, что, если $c_1 = c_2$, то $0 \in \{g(1,1), g(1,2), g(2,2)\}$, а если $c_1 \neq c_2$, то $0 \in \{g(1,1), g(1,2), g(2,1)\}$, что противоречит тому, что $g(x_1, x_2) \in T_{12}$. Итак, $T_{12} \cap L \subseteq P_3^1$, и из табл. 1 вытекает истинность (11).

Пусть $f \in U_0 \cap L$. Если среди переменных функции f найдутся две существенные (например, x_1 и x_2), то, подставляя 0 вместо всех остальных переменных, получим функцию $g(x_1, x_2) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \in U_0$, причем $c_1, c_2 \neq 0$. Легко видеть, что если $c_1 = c_2$, то $\{g(1,1), g(1,2), g(2,2)\} = E_3$,

а если $c_1 \neq c_2$, то $\{g(1,1), g(1,2), g(2,1)\} = E_3$, это противоречит тому, что $g(x_1, x_2) \in U_0$. Итак, $U_0 \cap L \subseteq P_3^1$, и, анализируя табл. 1, убеждаемся в справедливости (12).

Свойство (13) проверяется с помощью анализа одноместных подфункций.

Докажем (14). Пусть $f \in T_0 \cap T_1 \cap L$. Тогда $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$, причем $c_1 + c_2 + \dots + c_n = 1$.

Имеем $f(x_1 + 1, x_2 + 1, \dots, x_n + 1) = c_1(x_1 + 1) + c_2(x_2 + 1) + \dots + c_n(x_n + 1) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + 1$, что означает $f \in S$.

Справедливость (15) и (17)–(19) вытекает из двойственности классов.

Для доказательства (16) вспомним, что $U_0 \cap U_1 \cap U_2 = \{0, 1, 2, x\}$ (см. доказательство свойства (5)) и также воспользуемся двойственностью классов U_0, U_1 и U_2 :

$$U_0 \cap S = U_0 \cap U_1 \cap U_2 \cap S = \{0, 1, 2, x\} \cap S = \{x\} \subseteq U_1 \cap U_2 \cap T_{12}.$$

Докажем (20). Пусть $f \in B \cap S$. Функция f самодвойственна, поэтому она принимает все три значения. Учитывая $f \in B$, получим, что f имеет не более одной существенной переменной. Из табл. 1 следует $f \in \{x, x+1, x+2\} \subseteq L$.

Фиксируем произвольную функцию $f(\tilde{x}^n)$ из класса $T_{02} \cap T_{01}$. Заметим, что набор $\tilde{0}^n$ лежит как в множестве $\{0, 1\}^n$, так и в множестве $\{0, 2\}^n$. Следовательно, одновременно выполняются условия и $f(\tilde{0}^n) \in \{0, 2\}$. Значит, $f(\tilde{0}^n) = 0$, т.е. $f(\tilde{x}^n) \in T_0$. Свойство (21) доказано.

Для обоснования вложения (22) достаточно доказать, что $C_1 \cap T_0 \cap \bar{T}_{01} = \emptyset$. Предположим, что это не так. Пусть $f(\tilde{x}^n) \in C_1 \cap T_0 \cap \bar{T}_{01}$. Тогда $f(\tilde{0}^n) = 0$ и найдется набор $\tilde{\alpha}^n \in \{0, 1\}^n$ такой, что $f(\tilde{\alpha}^n) = 2$. Это противоречит тому, что $f(\tilde{x}^n) \in C_1$.

Докажем (23). Фиксируем произвольную функцию $f \in M_1 \cap T_1$. Имеем $f(1, 1, \dots, 1) = 1$ и $f \in M_1$. Значит, если $\tilde{\alpha}^n \in \{0, 1\}^n$, то $f(\tilde{\alpha}^n) \leq 1$. Другими словами, $f \in T_{01}$. Аналогично доказывается, что $f \in T_{12}$.

Убедимся в справедливости вложения (24). Для этого докажем, что $M_1 \cap C_1 \cap T_{02} \subseteq U_0$ (тогда будет справедливо и двойственное включение $M_1 \cap C_1 \cap T_{02} \subseteq U_2$). Предположим противное. Пусть существует функция $f(\tilde{x}^n) \in M_1 \cap C_1 \cap T_{02} \cap \bar{U}_0$. Тогда, в соответствии с фактами 1 и 2, у функции f найдется одноместная подфункция $\psi = (001)$ (см. табл. 1). Без ограничения общности можно считать, что при получении подфункции (001) у функции f фиксировались все переменные, кроме последней. Значит, существует набор $\tilde{\alpha}^{n-1}$ ($n > 1$, так как $f \in T_{02}$) такой, что $f(\tilde{\alpha}^{n-1}, 1) = 0$, $f(\tilde{\alpha}^{n-1}, 2) = 1$.

Заменим в наборе $\tilde{\alpha}^{n-1}$ все «единицы» на «двойки». Полученный набор обозначим через $\tilde{\beta}^{n-1}$. Из монотонности ($f \in M_1$) имеем $f(\tilde{\beta}^{n-1}, 2) \in \{1, 2\}$.

С другой стороны, $f(\tilde{\beta}^{n-1}, 2) = 1$ противоречит включению $f \in T_{02}$, а если $f(\tilde{\beta}^{n-1}, 2) = 2$, то получим противоречие с условием $f \in C_1$.

Проверим свойство (25). Пусть $f \in U_0 \cap T_1$. Тогда $f(\tilde{1}) = 1$, поэтому из $f \in U_0$ следует, что если $\tilde{\alpha}^n \in \{1, 2\}^n$, то $f(\tilde{\alpha}^n) \in \{1, 2\}$. Другими словами, $f \in T_{12}$.

Свойство (26) докажем от противного. Пусть существует функция $f(\tilde{x}^n)$, принадлежащая классу $U_0 \cap U_2 \cap T_{02} \cap \overline{M}_1$. В соответствии с фактом 2 найдутся два набора, соседние по i -й координате, $\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta}^n = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ такие, что $\tilde{\alpha}^n \prec \tilde{\beta}^n$, но $f(\tilde{\alpha}^n) > f(\tilde{\beta}^n)$ (все отношения вычисляются относительно обычного порядка $0 < 1 < 2$).

Рассмотрим три случая:

а) $f(\tilde{\alpha}^n) = 2$ и $f(\tilde{\beta}^n) = 0$. Так как $\alpha_i < \beta_i$, то $(\alpha_i, \beta_i) \in \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$. Заменяем (α_i, β_i) на $(\alpha_i, \beta_i) = (1, 1)$. Легко видеть, что для новых наборов $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$ справедливо $\tilde{\alpha}' = \tilde{\beta}'$, но в силу $f \in U_2 \cap U_0$ имеем $f(\tilde{\alpha}') = 2 \neq 0 = f(\tilde{\beta}')$. Это противоречие;

б) $f(\tilde{\alpha}^n) = 1$ и $f(\tilde{\beta}^n) = 0$. Заменяем в наборах $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ все «единицы» на «двойки». Для новых наборов $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$ (соответственно) также справедливо отношение $\tilde{\alpha}' \prec \tilde{\beta}'$. С другой стороны, из $f \in U_0 \cap T_{02}$ следует, что $f(\tilde{\alpha}') = 2$, $f(\tilde{\beta}') = 0$, причем наборы $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$ также являются соседними по i -й координате. Тем самым мы свели этот случай к случаю (а);

в) $f(\tilde{\alpha}^n) = 2$ и $f(\tilde{\beta}^n) = 1$. Аналогично предыдущему случаю заменим в наборах $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ все «единицы» на «нули». Тогда для полученных наборов $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$ имеем $\tilde{\alpha}' \prec \tilde{\beta}'$. С другой стороны, из $f \in U_2 \cap T_{02}$ следует, что $f(\tilde{\alpha}') = 2$, $f(\tilde{\beta}') = 0$, причем наборы $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$ также являются соседними по i -й координате. Мы вернулись к случаю (а) где противоречие уже получено.

Других вариантов нет. Свойство (26) доказано.

Наконец, убедимся в том, что выполнено вложение (27). Рассмотрим произвольную функцию f из класса $M_1 \cap T_{02} \cap B$. Из табл. 1 видно, что все функции одной переменной, принадлежащие этому классу, принадлежат и классу $C_0 \cap C_2$. Пусть теперь f существенно зависит от двух или более переменных. По определению класса B функция f принимает не более двух значений. Рассмотрим все возможные случаи.

Если $E(f) = \{0, 1\}$, то из $f \in T_{02}$ имеем $f(\tilde{2}) = 0$, а далее из монотонности получим $f \equiv 0$, что противоречит наличию у f двух существенных переменных. Аналогично, если $E(f) = \{1, 2\}$, то $f(\tilde{0}) = 2$ и $f \equiv 2$, что также противоречит существенности функции f .

Значит, $E(f) = \{0, 2\}$, поэтому $f \in C_0 \cap C_2$.

Доказательство теоремы завершено.

Автор выражает благодарность С. С. Марченкову за постановку задачи поиска всех пересечений предполных классов функций трехзначной логики и А. А. Вороненко за ценные замечания.

Список литературы

1. **Яблонский, С. В.** Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Наука, 1986. – 384 с.
2. **Post, E. L.** Introduction to a general theory of elementary propositions / E. L. Post // Amer. J. Math. – 1921. – V. 43, № 4. – P. 163–185.
3. **Post, E. L.** Two-valued iterative systems of mathematical logic / E. L. Post // Annals of Math. Studies. Princeton Univ. Press. – 1941. – V. 5. – 122 p.
4. **Яблонский, С. В.** О функциональной полноте в трехзначном исчислении / С. В. Яблонский // ДАН СССР. – 1954. – № 6. – С. 1153–1156.
5. **Яблонский, С. В.** Функциональные построения в k -значной логике / С. В. Яблонский // Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова. – 1958. – Т. 51. – С. 5–142.
6. **Rosenberg, I. G.** La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini / I. G. Rosenberg // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. B. – 1965. – V. 260. – P. 3817–3819.
7. **Rosenberg, I. G.** Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken / I. G. Rosenberg // Rozprawy Č eskoslovenske Akad. Ved. Rada Math. Prir. V ěd. Praha. – 1970. – Bd. 80. – S. 3–93.

Нагорный Александр Степанович
младший научный сотрудник, кафедра
математической кибернетики,
Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: anagorny@list.ru

Nagorny Alexander Stepanovich
Research assistant, sub-department
of mathematical cybernetics,
Moscow State University
named after M. V. Lomonosov

УДК 519.7

Нагорный, А. С.

О свойствах предполных классов в P_3 / А. С. Нагорный // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 16–24.